2024 年度　一般選抜中期日程　〔データサイエンス学部〕　数学
出題の意図と解答の傾向

$\boxed{1}$（60 点）

数学 I・数学 A・数学 II の幅広い単元から、基本的な知識を身に付け活用することができるかを問う問題を出題した。

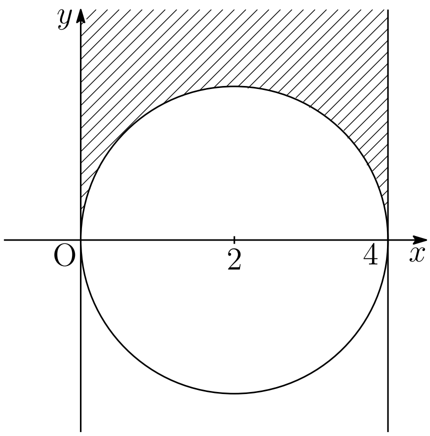
【解答】

(1) ア：$\sqrt{11}$　イ：$\dfrac{2\sqrt{77}}{7}$

(2) ウ：$24a^4b^2$　エ：-320

(3) オ：5　カ：8

(4) 求める領域は次の図の通り（境界線を含まない）。



【解答の傾向】

いずれも基本的な公式の活用により解ける問題であるが、(1) や (3) での計算ミスと思われる解答や、(2) で問われている項や係数といった意味に沿っていない解答が散見された。(4) では境界線となる曲線がはっきりと示せていない解答や、真数条件を考慮していない解答が見受けられた。基本的な事項に関しては、用語の定義も含め知識の正確な定着を図っておきたい。

$\boxed{2}$ **（70 点）**

数学 A「場合の数と確率」からの出題である。問題文で与えられた条件を正しく読み取り、適切に整理することができるかを問う出題とした。

【解答】

(1) A が 2 連勝した後は B が勝つ確率が $1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ になることに注意すると、求める確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{3}{16}$$

である。

(2) 初めから 3 回目の対戦で A が 2 勝目を挙げるのは、2 回目の対戦までで A が 1 勝、B が 1 勝し、3 回目で A が勝つときであるから、その確率は

$${}_2\mathrm{C}_1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$$

である。この後に A が優勝するのは、B が 2 連勝するとき以外であるから、求める確率は

$$\frac{8}{27}\times\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)=\frac{7}{54}$$

である。

(3) 初めから A が 2 連勝し、かつ A が優勝する確率は、

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^3\right)=\frac{37}{144}$$

である。初めから 4 回目の対戦で A が 2 勝目を挙げ、かつ A が優勝する確率は、(2) と同様に考えて

$${}_3\mathrm{C}_1\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{27}$$

である。A が優勝したとき、A が 2 連勝、3 回目の対戦で A が 2 勝目を挙げる、4 回目の対戦で A が 2 勝目を挙げる、のいずれかが成り立つことから、求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{37}{144}}{\frac{37}{144}+\frac{7}{54}+\frac{1}{27}}=\frac{37}{61}$$

である。

【解答の傾向】

(1), (2) は正答が比較的多かった。確率の問題では、状況を正確に理解することが重要である。必要に応じて図や表などを用い、問題文を把握する練習をしておくとよい。また、正しく立式できていながら計算間違いをしている解答も見受けられた。限られた試験時間の中でも、計算の見直しをしながら解き進めるよう心がけたい。

(3) の正答者は残念ながら少なかった。条件付き確率の計算においては、$P_X(Y) = \dfrac{P(X \cap Y)}{P(X)}$ の分母・分子にあたる $P(X)$, $P(X \cap Y)$ をそれぞれ求めることを意識するとよい。本問も、基本用語の確実な理解が重要であったといえる。

$\boxed{3}$ 【A】（70 点）

数学 B「数列」から、誘導に従って漸化式を正しく捉えられるか、また (3) では項の規則に着目して与えられた条件を言い換えることができるかを問う出題とした。

【解答】

(1) $a_n = b_n - 2n,\ a_{n+1} = b_{n+1} - 2(n+1)$ より、これらを漸化式に代入すると

$$b_{n+1} - 2(n+1) = -2(b_n - 2n) - 6n - 2$$

となる。これを整理すると $b_{n+1} = -2b_n$ となるから、$\{b_n\}$ は公比 -2 の等比数列である。

(2) $b_1 = a_1 + 2 = 1$ より $b_n = 1 \cdot (-2)^{n-1}$ である。よって求める一般項は

$$a_n = b_n - 2n = (-2)^{n-1} - 2n$$

である。

(3) n が偶数のとき、$(-2)^{n-1}$, $-2n$ はともに負であるから a_n は負である。

$a_1 = -1,\ a_3 = -2$ は負であり、$k \geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_{2k+3} &= (-2)^{2k+2} - 2(2k+3) = 4^{k+1} - (4k+6) \\ &\geqq 4(k+3) - (4k+6) = 6 > 0 \end{aligned}$$

であるから、$\{c_n\}$ は $\{a_n\}$ の第 5 項以降の奇数項を順に並べた数列であり、

$$c_n = a_{2n+3} = (-2)^{2n+2} - 2(2n+3) = 4^{n+1} - 4n - 6$$

である。以上より求める和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n}(4^{k+1} - 4k - 6) &= \frac{16(4^n - 1)}{4-1} - 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 6n \\ &= \frac{16}{3}(4^n - 1) - 2n^2 - 8n\end{aligned}$$

である。

【解答の傾向】

(1) は証明問題であるが、「等比数列であることを示す」という指示に戸惑ったと思われる解答が見られた。数列 $\{b_n\}$ が等比数列であるとは、ある実数 r（公比）が存在して $b_{n+1} = rb_n$ が全ての n について成り立つことである。これを意識できれば、a_n についての漸化式を b_n に書き換える方針が思いつきやすい。$b_1 = 1, b_2 = -2, b_3 = 4$ を直接求めて $b_n = (-2)^{n-1}$ と結論づけている解答もあったが、これは一般の n に対する証明にはなっていないことに注意が必要である。

(2) については、誘導を利用せず、$a_{n+1} = -2a_n - 6n - 2$ を無理やり式変形したり、階差数列を用いようとしたりする解答が散見された。これらの方針でも正答に辿りつくことは可能だが、$\{b_n\}$ が等比数列であることを用いれば $\{b_n\}$ の一般項、$\{a_n\}$ の一般項の順に単純な式変形で求めることができる。

(3) で最終的な正答に辿りついている解答は少なかったが、$\{c_n\}$ が $\{a_n\}$ の奇数番目の項からなることに気付いている解答も一定程度見受けられた。シグマ計算で間違っている解答もいくつか見られた。

$\boxed{3}$ 【B】（70 点）

数学 B「確率分布と統計的な推測」からの出題である。期待値の加法性、独立な確率変数に関する期待値や分散の理解を問う問題とした。

【解答】

(1) 大きいさいころの目の数を A、コインの表面の数を B とおくと、$A,\,B$ は独立な確率変数で $X=10A+B$ が成り立つ。

$$E(A)=\frac{1+1+2+2+3+3}{6}=2,\qquad E(B)=\frac{2+4}{2}=3$$

であるから、求める期待値は

$$E(X)=E(10A+B)=10E(A)+E(B)=10\cdot 2+3=23$$

である。

(2) 小さいさいころの目の数を A' とおく。コインの裏面の数は $6-B$ と書けることに注意すると、$A,\,A',\,B$ は独立な確率変数で $Y=10A'+(6-B)$ が成り立つ。よって $X-Y=10A-10A'+2B-6$ である。ここで

$$V(A)=\frac{(1-2)^2+(1-2)^2+(2-2)^2+(2-2)^2+(3-2)^2+(3-2)^2}{6}=\frac{2}{3},$$

$$V(A')=\frac{2}{3},\qquad V(B)=\frac{(2-3)^2+(4-3)^2}{2}=1$$

であるから、求める分散は

$$V(10A-10A'+2B-6)=10^2\cdot V(A)+(-10)^2\cdot V(A')+2^2\cdot V(B)=\frac{412}{3}$$

である。

(3) 分散の性質より、

$$\begin{aligned}V(X-Y)&=E\big((X-Y)^2\big)-E(X-Y)^2\\&=E(X^2-2XY+Y^2)-\big(E(X)-E(Y)\big)^2\\&=V(X)+V(Y)+2E(X)E(Y)-2E(XY)\end{aligned}$$

が成り立つ。

$$E(Y)=E(10A'+6-B)=10E(A')+6-E(B)=10\cdot 2+6-3=23,$$

$$V(X)=V(10A+B)=10^2\cdot V(A)+V(B)=\frac{203}{3},$$

$$V(Y)=V(10A'+6-B)=10^2\cdot V(A')+V(B)=\frac{203}{3}$$

であるから、求める期待値は

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= E(X)E(Y) + \frac{1}{2}\big(V(X) + V(Y) - V(X-Y)\big) \\
&= 23 \cdot 23 + \frac{1}{2}\left(\frac{203}{3} + \frac{203}{3} - \frac{412}{3}\right) = 528
\end{aligned}
$$

である。

【解答の傾向】

本問題を選択した受験者は少なかった。(1) は正答できている解答が多かった。(2), (3) については、期待値の性質からの類推で $V(X-Y) = V(X) - V(Y)$ などと変形している解答が見受けられた。X, Y が独立の場合 $V(X-Y) = V(X) + V(-Y) = V(X) + V(Y)$ が成り立つが、本問の場合は X, Y は独立ではないため、さいころやコインで出た数を用いて変形する必要がある。